Towards Mathematical Sciences
Vol. 3, No. 1, Spring and Summer 2023, pp. 22–43
DOI.10.22067/tmsj.2023.43620
Expository Article

https://tmsj.um.ac.ir

HISTORY OF MATHEMATICS IN THE ISLAMIC ERA: THE INSTRUMENTAL ROLE OF "POETRY" IN THE TEACHING OF INDIAN ARITHMETIC

FATEMEH SAADATMAND[1]

[1]Research Institute of History of Science, University of Tehran, IRAN
saadatmand88@ut.ac.ir

Abstract. In the history of mathematics during the Islamic period, poetry was used as an educational tool and has been applied for the purpose of arithmetic teaching. The special features of rhyming couplets in easier learning and faster recall of arithmetic rules were the main reason for the success of this educational method, as it was used in textbooks and pedagogical materials for centuries, and it was effective until recent centuries. This paper aims to remind the importance of one of the common methods of teaching mathematics and science in the past, which is to use the capacity of poetry and literature for introducing Indian arithmetic, by introducing two manuscripts on rhythmic arithmetic. Furthermore, it will explain the general principles of Indian arithmetic and examine a method of multiplication and division which is known as "Lattice" belonging to the seventh century AH.

2020 Mathematics Subject Classification. 97A30, 01A30, 00A06
Keywords. history of mathematics, poetry, Indian arithmetic, pedagogy, practical arithmetic
Date: Rceived 12-9-2022 Revised 5-2-2023 Accepted 6-3-2023 Available Online 10-3-2023

دوره ۳، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۲، صص. ۲۲-۴۳
DOI. 10.22067/tmsj.2023.43620
مقاله علمی-ترویجی
به سوی علوم ریاضی
https://tmsj.um.ac.ir

تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی: نقش ابزاری «شعر» در آموزش حساب هندی

فاطمه سادات سعادتمند[1]

[1]پژوهشکدهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران

saadatmand88@ut.ac.ir

چکیده. در تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، شعر به‌عنوان ابزاری کمک‌آموزشی و به‌منظور آموزش حساب به‌کار می‌رفت. ویژگی‌های خاص کلام موزون در یادگیری آسان‌تر و یادآوری سریع‌تر قواعد حسابی سبب اقبال این شیوهٔ آموزشی بود به‌گونه‌ای که سده‌ها از آن در منابع و رسایل درسی استفاده می‌شد و تا قرون اخیر نیز کارایی داشت. این گفتار بر آن است تا با معرفی دو نسخهٔ خطی در باب حسابِ منظوم، اهمیت یکی از روش‌های متداول آموزش ریاضیات و علوم در گذشته یعنی بهره‌گیری از ظرفیت شعر و ذوق ادبی را در آموزش حساب هندی یادآور شود و افزون بر آن، اعمال محاسباتی اصلی و همچنین «میزان» در حساب هندی را شرح دهد و به بررسی روشی در ضرب و قسمت بپردازد که با نام «شبکه» مشهور گشته است و به سدهٔ هفتم هجری قمری تعلق دارد.

۰. مقدمه

شیوهٔ حساب هندی بر اساس ۹ نشانهٔ هندی یعنی ارقام ۱ تا ۹ و یک دایرهٔ توخالی (صفر) است که برای محفوظ نگه داشتن مراتب خالی به‌کار می‌رفت. مسلمانان تا پیش از آشنایی با حساب هندی، نوعی حساب عملی را به‌کار می‌بردند و از جنبهٔ توصیفی و حروفی اعداد استفاده می‌کردند و غالباً از حروف ابجد برای نشان

2020 Mathematics Subject Classification 97A30, 01A30, 00A06.

کلید واژگان. تاریخ ریاضی، شعر، حساب هندی، آموزش، حساب هوایی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۶/۲۱ بازنگری ۱۴۰۱/۱۱/۱۶ پذیرش ۱۴۰۱/۱۲/۱۵ انتشار برخط ۱۴۰۱/۱۲/۱۹

نحوه ارجاع به این مقاله: ف.س. سعادتمند، تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی: نقش ابزاری «شعر» در آموزش حساب هندی، به سوی علوم ریاضی، ۳ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۴۳-۲۲.

دادن مقادیر اعداد سود می‌جستند. ابداع دستگاه اعداد دهگانی به قرون اولیهٔ میلادی باز می‌گردد، اما نخستین سند کتبی که در این‌باره از هند باز مانده، مربوط به ۵۹۵م. است ([۱۲، ص. ۴۵۵]). در سال ۱۵۴ ق. هیئتی اعزامی از هند به بغداد وارد شد. این هیئت مجموعه‌ای از جداول نجومی (زیج) را به همراه داشت که پس از آن به‌انضمام جداول دیگری که برهماگوپتا[۱] تهیه کرده بود، نخستین بار با ترجمهٔ کتاب نجومی سیدهانتا (تألیف ۶۲۸ م.)[۲]، از سنسکریت به عربی، توسط ابواسحاق ابراهیم بن‌حبیب فزاری (د. ۱۸۸ ق.) به سرزمین‌های اسلامی راه یافت و سپس از طریق تألیفات خوارزمی (د. ۲۳۳ ق.) به‌کار گرفته و رایج شد. پس از ورود هیأت هندی به دربار منصور عباسی، چون خلیفه از کتاب معروف سیدهانتا به زبان سنسکریت و جدولهای موجود در آن دربارهٔ حرکات سیارات خبر یافت، به ترجمهٔ آن فرمان داد و مقرر داشت به همان شیوه کتابی به زبان عربی تدوین شود و این کار را به عهدهٔ فزاری گذارد ([۵، صص. ۱۱۷، ۳۲۰]؛ [۹، صص. ۵۰–۴۹]). زیجی که فزاری بدین ترتیب فراهم آورد به سند هند کبیر شهرت یافت و تا دوران مأمون مورد استفادهٔ منجمان اسلامی بود و سپس به‌دست محمّد بن موسی خوارزمی تلخیص و تصحیح شد و به زیج سند هند معروف گشت[۳]. خوارزمی دو رسالهٔ *الحساب الهندی* و *الجمع و التفریق* را در سال ۲۰۹ ق. تألیف کرد هرچند متن هیچ‌یک از این دو رساله باقی نمانده است، احتمالاً موضوع آنها روش استفاده از ارقام هندی بوده است. قدیمی‌ترین اثر به جامانده به عربی دربارهٔ حساب هندی، کتاب *الفصول فی الحساب الهندی* نوشتهٔ اقلیدسی است که در سال ۳۴۱ ق. در دمشق نوشته شده و فقط در نسخهٔ منحصر به فردی که دو قرن پس از آن و در ۵۸۱ ق. استنساخ شده، باقی مانده است. همچنین در بسیاری از آثار نجومی هندی، نخستین بخش به حساب اختصاص دارد، از جمله بخش اول کتابی از بهاسکره[۴] که لیلاوتی[۵] نام دارد ([۴، ص. ۸۵]).

در دورهٔ اسلامی، حساب هندی و خصوصاً آسانی به‌کارگیری آن در مراتب ارزش مکانی که از سده‌های پیشین و از دوران بابلیان شناخته شده بود، رواج یافت و با ابزارهایی چون تخت و تراب[۶] عرضه گشت و برای انجام محاسبات و نیز آموزش اعمال اصلی به کار گرفته شد. از سدهٔ ۴ ق. به بعد کم‌کم تخت و تراب جای خود را به کاغذ داد و روش‌های نوینی برای محاسبات مقدماتی چون جمع و تفریق، تضعیف و تنصیف و همچنین ضرب و قسمت ابداع شد.

---

[۱] Brahmagupta

[۲] Sidhanta

[۳] از اصل این زیج، نسخهٔ خطی به‌جا نمانده و فقط از طریق ترجمهٔ لاتینی آدلارد باثی (۱۰۸۰–۱۱۵۲م) از تحریر مسلمة بن احمد مجریطی (ح ۳۹۰ق، قرطبه) از آن آگاهی داریم.

[۴] Bhaskara II

[۵] Lilavati

[۶] خاکی نرم که به آن «تراب» یا «غبار» گفته می‌شد روی تخته‌ای مخصوص می‌پاشیدند و با وسیله‌ای قلم‌مانند که به میل نیز معروف بود، ارقام هندی را روی تخته ثبت می‌کردند و با شیوه‌های مخصوص و مشخص عملیات حسابی را انجام می‌دادند.

۲. نقش شعر در آموزش حساب

در کتب حساب قدیم، بیان جدول ضرب با استفاده از ادبیات منظوم و خصوصاً شعر در قالب ساده (مثنوی) پیشینه دارد. این روش آموزشی گرچه امروزه متداول نیست، اما درگذشته برای جذاب ساختن ریاضیات، تنوع بخشیدن به مباحث درسی و همچنین تصویرسازی در ذهن دانش‌آموز با کمک وزن آهنگین صورت می‌گرفت. «حساب هوایی» نوعی «حساب عملی» است که در آن مسائل و محاسبات به صورت ذهنی و بدون استفاده از وسیله‌ای چون تخت، کاغذ یا ابزار محاسباتی دیگر انجام می‌شود. مباحث حساب هوایی مخصوص بازرگانان در سفر، فروشندگان بازار و عوام مردم بود خصوصاً آن دسته که از سواد خواندن و نوشتن بی‌بهره بودند یا آن دسته که به لوازم کتابت دسترسی نداشتند یا قادر به تهیهٔ آن نبودند. آثار حساب هوایی معمولاً روش‌هایی از ضرب، قسمت و نسبت را به شیوهٔ ذهنی به‌کار می‌گیرد و بعضاً به مهارت‌هایی چون شعر می‌پردازد که عملاً بر حافظه مبتنی باشد [۸]. این شاخه از حساب که معمولاً با روش‌هایی ذهنی برای ضرب و قسمت و حل مسائل سر و کار دارد، از ابزار شعر در این بستر سود جسته و قواعد حساب را برای یادگیری سریعتر و آسان‌تر با شعر می‌آمیخت تا نوآموز به راحتی آن قاعده و ضابطه را به خاطر سپارد، تکرار نماید و ملکهٔ ذهن سازد. در برخی آثار حساب در ذکر قاعدهٔ روش‌های ضرب ذهنی، ابیات متواتر و فراوان و البته پراکنده‌ای وجود دارد. یکی از آن ابیات که به علی (ع) منسوب گشته (به طور مثال شکل ۸ در پیوست‌ها)، مربوط به ضرب آحاد در بازهٔ شش تا ده و به زبان عربی است که در آن اعداد به حروف ابجد بیان می‌شوند:

وَو لَوٍ، وَز مَبٍ، وَح مَحٍ، وَط نَدٍ　　زَز مَطٍ، زَح نوٍ، زَط سَجٍ، حَح سَدٍ
حَط عَبٍ، طط فاءٍ، ضرب ما　　دون عشرٍ ها الیهاً تهتدی

مثلاً در این‌جا با توجّه به اینکه «و» ابجد معادل عدد ۶ و «ل» ابجد معادل ۳۰ است، «وو لوٍ» یعنی «شش‌شش، سی و شش» و به همین ترتیب حاصل‌ضرب تمامی اعداد تک‌رقمی کوچکتر از ده بیان می‌شود. این قطعه به‌کرات در نسخ خطی تکرار شده است و آن را در برگ آغازین نسخه یا در هامش بسیار نسخ با موضوع نجوم و ریاضیات نیز نگاشته‌اند و بعضاً آن را به نصیرالدین طوسی منسوب ساخته‌اند (به طور مثال شکل ۹ در پیوست‌ها) چنان‌که دو بیتی زیر در آثار حساب عملی که بسیار متواتر است، نیز بدو منسوب گشته و با این حال در رسالهٔ حساب هوایی وی نیامده است [۸]:

آحاد بر آحاد فراز آر مدام　　ده بفکن و هر زایده را ده کن نام
از هر طرفی نگر که تا ده چند است　　در یکدگرش ضرب کنی گشت تمام

این دوبیتی، نیز روشی برای یافتن حاصل‌ضرب دو عدد مفرد در بازهٔ شش تا ده پیشنهاد می‌کند که به بیان ساده چنین است:

(۱) مجموع دو عدد را به دست آورده و ده تا از آن کم می‌کنیم.

(۲) حاصل‌ضرب تفاضل هر دو عدد از ده را حساب می‌کنیم.

(۳) ده برابر حاصل مرحلهٔ نخست را با مقدار به‌دست‌آمده در مرحلهٔ بعد جمع می‌کنیم، نتیجه حاصل می‌شود.

مثلاً حاصل‌ضرب ۷ در ۸:

(۱) مرحلهٔ اوّل: ۵ = ۱۰−(۷+۸)

(۲) مرحلهٔ دوم: ۶ = (۷−۱۰)×(۸−۱۰)

(۳) حاصل‌ضرب: ۵۶ = ۶+۵×۱۰

رسایل معدودی نیز با استفاده از فنون شعری به آموزش اصول پایه و مقدماتی حساب هندی پرداخته‌اند از جمله ابیاتی چند از شاعر یا شعرایی گمنام در شرح ضوابط و اعمال اصلی حساب از جمله روش تضعیف، تنصیف، جمع و تفریق، محاسبات میزان و میزان‌گیری و همچنین قواعدی که در ضرب و قسمت شبکه سروده شده است.

دو نسخهٔ خطی از این آثار منظوم در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی با شمارهٔ ۵۳۷۹ (گ۵۹پ−۶۱پ) و شمارهٔ ۶۵۴۵ (گ۱۲پ−۱۳پ) دستیاب است[۷] که ابیات آغازین آن از این قرارند ([۳، گ۱پ]):

به نام کردگار «فرد» بی‌«زوج» — که دایم بحر لطفش می‌زند موج
خداوندی که در بر در «حساب» او — به «میزان» علتی بخشد ثواب او
در «اعمال» ار بود از «کسر» «نقصان» — کنند «جبر» و «کسور» آن به‌غفران
درود بی‌«عدد» بر خان چون پاک — که او بر فرق دارد تاج لولاک[۸]
رسولی کو به «ضرب» تیغ توفیق — طریق حق ز باطل کرد «تفریق»
دگر بر روح پاک جمله اصحاب — همان بر زمرهٔ اتباع و احباب
پس از حمد و درود رب عالم — ز بعد نعت احمد فخر آدم

همان‌طور که مشخص است شاعر آشنا به قواعد ریاضیات، با استفاده از اصطلاحات حساب و پیوند آن با ادبیات به حمد و ستایش خدا و رسول وی (ص) پرداخته و با بهره‌گیری از آرایه‌های ادبی و استعاره و ایهام، مقدمه‌ای بر این اثر حسابی ساخته است. این نحوهٔ آغازه‌بندی و مقدمه‌نویسی بر آثار علمی و ادبی عادتی رایج میان نویسندگان و اندیشوران پیشین بود. پس از آن ابیات را بدین صورت ادامه می‌دهد:

بدان کز گفتهٔ ارباب حکمت — حساب آید کلید باب حکمت
ریاضی را بود صحت بدو سخت — همش صحبت قوی حاجت بدو سخت

---

[۷] نسخ خطی مطالعه‌شده در این پژوهش از طریق وب‌سایت کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی در دسترس است.

[۸] اشاره‌ای است به حدیثی قدسی، خداوند خطاب به حضرت محمّد (ص) فرمود: «لولاکَ لما خلقتُ الأفلاک»: اگر تو نبودی دست به آفرینش هستی نمی‌زدم.

نجوم شرع پس ناگزیر[۹] است — امور مُلک را خوش دستگیر است
چو من با وی سر مألوف دارم — برو اوقات خود مصروف دارم
قوانینش به نظم آورده خوانم — روان در نظم [آن] پرورده خواهم
به شرط آنکه فیض حق شود یار — امان یابم ز جور چرخ دوّار

از فحوای ابیات بالا چنین بر می‌آید که شاعر به نقش حساب در محاسبات نجومی و تعیین مواقیت شرعی و همچنین نقش نجوم در تعیین احوال ملک و مملکت و اوضاع شاهان چنان‌که در احکام نجوم به کار گرفته می‌شد، آگاهی داشته است. پس از مقدمه، ارقام هندی به صورت زیر معرفی می‌شود و ابیاتی در توصیف اعمال حسابی در پی آن می‌آید:

حکیمان کاندرین علم[اند] اُستاد — عدد بر نُه ورق کردند اِستاد
ز یک تا نُه رقم بنیاد کردند — ز تحریر این‌چنین اسناد کردند

۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱

۱.۲ شعر در طریق تضعیف

عددی را که می‌کنی تضعیف — صورت آن بعینها بنگار
بعد از آن یک‌به‌یک مضاعف ساز — در یمین گیر اوّل این کار
بعد تضعیف اگر به ده برسند — در همان مرتبه بنه به‌قرار
لیک در هر کجا که باشد صفر — تو مر او را به حال خود بگذار
همچنین تا عدد تمام شود — این قواعد تمام آر به کار

۲.۲ شعر در طریق تنصیف

عددی را که می‌کنی تنصیف — اوّلاً صورتش می‌کن تعیین
پس از آن از یسار کن بنیاد — یک‌به‌یک نیمه ساز و باز ببین
آنچه زوج است نیست کسر درو — نیمه در زیر او بنه به زمین
ور بود طاق به هر نیمهٔ او — پنج را نیز نما به نصف یمین
تا رسی تو به رتبهٔ آحاد — این عمل بایدت نمود چنین
ور در آحاد نیست صورت طاق — رقم نصف بایدت کرد این
بود نصف صحیح اگر باشد — بدو یکی و دو بنه به‌یقین
ور نباشد صحیح هیچ درو — صفر و مدّ و یکی و دوست همین

[۹] ضبط نسخه: ناگذیر

۳.۲ شعر در طریق جمع

جمع اعداد چون بخواهی کرد — جملگی را نویس بر یک‌جا
که برابر بود مراتب کل — پس از آن آحاد ابتدا بنما
وانگهی جمع کن همهٔ آحاد — بنگر از کجا رسید به کجا
هر چه از ده زیاده شد آن را — بنه آنجا و به هر ده یک را
می‌فزا بر یسار نشان یکان — هست عشرات و عمل تمام نما
همچنین تا عمل تمام شود — جمع می‌کن تمامی این‌ها
هرجا کاندرو بود صفری — صفر بر حال خود نمای رها

۴.۲ شعر در طریق تفریق

عدد را از عدد چون کم نمایی — رقم کن هر دو را اول به جایی
بنه منقوص اوّل را پس آنگاه — بده منقوص را در تحت او راه
رقم‌ها آنچنان نه ای برادر — که باشد با نظیر خود برابر
پس آنگاه از یسارش ابتدا کن — مر او را در نظیر او جدا کن
اگر چیزی بماند از نظیرش — بنه آن چیز باقی را به زیرش
وگر زان خود نظیر اوست کمتر — کمی را از یسار او بیاور
یکی زان ده بود نسبت بدین‌جا — از آن ده کم نما آنگاه این را
بیفزا با نظیر، آن باقیِ ده — بگیر این را خوش و می‌رو برین ره
دگر زانکه یساری نیست آن را — بیاور از میآت آن یکی را
بنه نُه را از آن صد بر یسارش — یکی کان ده بود اینجا بیارش
بدان دستور کم کن آن از آن ده — مده از دست خود مطلق تو این ره
همین اعمال باید با یمین کرد — عمل‌ها را همه با او چنین کرد
بدین دستور می‌رو تا به آحاد — برین اعمال بنه زین پس تو بنیاد

۵.۲ شعر در طریق ضرب شبکه

ابیات زیر به منظور شرح ضرب به روش شبکه آمده است ([۲، گ ۵۹پ–۶۰پ] ؛ [۳، گ۱۲پ–۱۳ر]):

چو خواهی کرد در هم ضرب اعداد — در اوّل، جدول آن کن تو بنیاد
پس آن مضروب، فوق جدول آرش — بنه مضروبٌ فیها بر یسارش
ببین چند است هر یک از مراتب — بدان مقدار قسمت کن مناسب

ز بُعد او مربّع‌های اصغر — بود با ضرب مفردها برابر
به فوق هر مربّع یک عدد آر — وزان جانب دگر می‌کن همین کار
نظر کن تا مربّع‌های جدول — خصوصاً آخرین از سطر اوّل
چنان کن کآخرِ هر دو مراتب — بر آن واقع شود از هر دو جانب
مثلث ساز آنگه جملگی را — در اتمام عمل تقصیر منما
ز فوقانی بکن بنیاد اوّل — ز فردی کوست در پایان جدول
ببین تا خود از این‌ها چیست حاصل — ده است یا کم ز ده یا هست فاضل
بزن هر صورتش را ای هنرور — به هر یک‌یک ز مفردهای آخر
کم از ده در مثلث‌های سفلی — رقم کن در موازی‌های آن‌ها
ولیک از بهر هر یک ده، یکی را — بنه اندر مثلث‌های علیا
بدین دستور می‌رو تا به آغاز — که تا با فرد اوّل ای سرافراز
بدو هم این عمل‌ها را وفا کن — پس آنگه زان مثلث ابتدا کن
که باشد زان مربّع ای برادر — که هست از اوّلینِ سطر آخر
بود بی‌شبهه آن آحاد حاصل — بنه چیزی که در وی هست داخل
وگر در وی نباشد هیچ چیزی — بنه صفری کزین نبود گریزی
به دستوری که معهود است در جمع — به صورت جمع کن ای جمع را شمع
بنه آحاد در پهلویش آنگه — یکی بفزا برای هر یکی ده
به مابین مورّب کوست تالی — بده این قاعده از دست خالی
برد تا آن مربّع کو ز جدول — بود در آخرینِ سطر اوّل
به علیای مثلث چون رسیدی — عمل آخر شد و تو هم رهیدی
به هر جایی که باشد صفر آنجا — به حال خویشتن بگذار آن را
عمل‌هایی که گشت این‌جا مقرّر — شود معلوم زین شکل مصوّر[۱۰]

۶.۲ شعر در قاعدهٔ قسمت شبکه

ابیات زیر نیز به منظور شرح قسمت به روش شبکه آمده است ([۲، گ۶۰پ–۶۱پ]؛ [۳، گ۱۳پ]):

گر تو خواهی تا کنی قسمت عدد را بر عدد — از خدا درخواه کن توفیق و یاری و مدد
مفردی اعظم طلب کن اوّلد از مفردات — خواه از آحاد باشد یا که باشد از میات
چون به مقسومٌ علیها ضرب سازی آن زمان — حاصلش مقسوم باشد یا بود کمتر از آن

[۱۰] جداول این اعمال حسابی در دست‌نویس‌ها موجود نیست و از آن‌ها افتاده است اما در ادامه با استفاده از دیگر متون کهن حساب که این نوع ضرب در آن‌ها شرح و بحث شده به توضیح هر روش با رسم جدول مربوط می‌پردازیم.

گرچه مقصود است حاصل، آن عدد کافی بود — خارج القسمة آن مفرد همین وافی بود
ور که چیزی از مقسوم می‌بینیم کان — یا ز مقسومٌ علیها زاید است یا کم از آن
زاید ار شد مفردی را کمتر از اولین — زن به مقسومٌ علیه و حاصل او را ببین
حاصل او گر برابر گشت با باقی تمام — هر دو مفرد خارج القسمة است باقی والسلام
ور ز باقی هرچه باقی مانده ای صاحب‌هنر — آن ز مقسومٌ علیها کم بود یا بیشتر
بیش اگر باشد طلب کن مفردی ثالث از آن — حاصل آن بین و مقسومٌ علیها بعد از آن
گرچه باقی بقایا باشد و آنگه چون — رفتی آن حاصل بقایا کم بود ای رهنمون
گر برابر گشت حاصل با بقایای کمان — خارج القسمة است جمله مفردات ای کامران
ور ز مقسومٌ علیها کم بود زان مابقی — نسبت او بین به مقسومٌ علیها ای تقی
بعد از آن این مفردات و کسر آن — خارج القسمة است گفتم جملگی را والسلام
هر محاسب کین نماید حل بسی ماهر بود — در حساب ضرب و قسمت به زمن قادر بود

۳. اعمال محاسباتی

در حساب هندی، اعمال حسابی را می‌توان به دو صورت متداول کلی انجام داد. نخست همانند حسابی که در اکثر رسایل اوایل شرح آن رفته است با پاشیدن خاکی نرم بر روی تخت و به‌وسیلهٔ ابزاری که برای کشیدن و «ثبت» اشکال نُه‌گانه روی تخت استفاده می‌شد و بدان «تخت و تراب» می‌گفتند و روش دوم استفاده از کاغذ و قلم است.
این رسایل منظوم چهار روش تضعیف، تنصیف، جمع و تفریق را در ابتدا با روش تخت و تراب شرح می‌دهند و سپس روشی در ضرب و قسمت که مخصوص کاغذ است، را با ابیاتی مشترک توضیح می‌دهند.

۱.۳ تضعیف و تنصیف، جمع و تفریق تضعیف یعنی دو برابر کردن و تنصیف یعنی بخش کردن عدد بر دو یا نیمه کردن آن. هر دو شیوه در ریاضیات کهن مصری از اسباب عمل ضرب بود. مصریان از دو برابر ساختن مکرّر و متوالی یک عدد برای یافتن حاصل‌ضرب استفاده می‌کردند (شکل۱).
این روش در صورتی برای ضرب دو عدد کارایی دارد که قاعدهٔ زیر رعایت گردد و برای هر عدد m بتوان نوشت:

$$m = \sum_{n=0}^{N} k2^n \quad k \in \{0,1\},$$

و به نظر می‌رسد مصری‌ها به این قانون کلی که «می‌توان هر عدد را به صورت مجموعی از توان‌های دو نوشت» اشراف کامل داشته‌اند چون توانسته‌اند انواع ضرب را با روش تضعیف و تنصیف و بدون استفاده از جدول ضرب اعداد انجام دهند ([۱۱، ص. ۸۷]) چنان‌که شیوهٔ ضرب ایشان بعدها کامل‌تر شد و به صورت روش «تضعیف و تنصیف» هم‌زمان درآمد ([۱۶، صص. ۶۱–۶۰]). اساس این روش، نوشتن یکی از دو عامل

۱۷	۱	→
۳۴	۲	
۶۸	۳	→
۱۳۶	۴	→

۱۳=۸+۴+۱ ۲۲۱=۱۳۶+۶۸+۱۷

شکل ۱: مراحل انجام ضرب به روش تضعیف: حاصل‌ضرب ۱۷ در ۱۳

ضرب به صورت یک سری توان دو است که با توجّه به حاصل‌تضعیف متناظر اعضای آن در هر مرحله و افزودن آن‌ها به یکدیگر می‌توان به حاصل‌ضرب دو عدد دست یافت. (شکل۲).

یونانی‌ها نیز این روش ضرب را با برخی اصلاحات به‌کار برده‌اند و تا سده‌های میانی نیز همچنان رایج بود ([۱۱، ص. ۸۷]) هرچند در بیشتر منابع اسلامی همچون رسالهٔ حاضر در عمل ضرب و قسمت به عمل تضعیف و تنصیف بدون به‌کارگیری آن در جهت ضرب و قسمت اشاره شده اشت. در بسیاری از کتب حساب پیش از شرح اعمال جمع و تفریق به دو عمل تضعیف و تنصیف پرداخته می‌شود. تضعیف و تنصیف، خود نوعی حالت خاص از عمل ضرب و قسمت به شمار می‌رود و به نظر می‌رسد در نظر گرفتن آن به‌عنوان اعمالی جداگانه سنتی باشد که از حساب مصری نشأت گرفته است ([۱۰، صص. ۴۴–۴۳]).

۱۷	۲۲۵	→
۳۴	۱۱۲	
۶۸	۵۶	
۱۳۶	۲۸	
۲۷۲	۱۴	
۵۵۴	۷	→
۱۰۸۸	۳	→
۲۱۷۶	۱	→

۲۱۷۶+۱۰۸۸+۵۴۴+۱۷

۳۸۲۵=

شکل ۲: مراحل انجام ضرب به شیوهٔ تضعیف و تنصیف: حاصل‌ضرب ۲۲۵ در ۱۷

در حساب مصری، روش تقسیم نیز مشابه روش ضرب انجام می‌شد و مقسوم‌علیه را چند بار به طور متوالی تضعیف می‌کردند تا بتوان مقسوم را به صورت مجموعی از حاصل‌تضعیف‌ها نوشت و سپس به روش عکس ضرب و با افزودن اعضای سری توانی دو متناظر با آن حاصل‌تضعیف‌ها، خارج قسمت را می‌یافتند (شکل ۳).

۱		۲۹
۲		۵۸
۴		۱۱۶
۸	→	۲۳۲
۱۶	→	۴۶۴
۸+۱۶=۲۴		۲۳۲+۴۶۴=۶۹۶

شکل ۳: مراحل انجام قسمت به شیوهٔ تضعیف:خارج قسمت ۶۹۶ بر ۲۹

در رسایل دورهٔ اسلامی، عمل «جمع» با معادل‌هایی چون «زیادت کردن»، «افزودن» و «ضم کردن» نیز به‌کار می‌رود. همچنین به «تفریق»، «نقصان کردن»، «کاستن» یا «طرح کردن» نیز گفته می‌شود.

۲.۳ میزان و میزان‌گیری میزان‌گیری در اصل آزمونی برای سنجش درستی اعمال حساب (تضعیف، تنصیف، جمع، تفریق، ضرب، قسمت و جذر) است. میزان‌های مرسوم، مقدار باقی‌ماندهٔ عدد بر عدد نُه یا یازده بود. برخی از رسایل حسابی برابر شدن حاصل میزان و میزان حاصل عمل را دلیلی بر درستی عمل حسابی دانستند و برخی تنها ناراستی این دو مقدار را دلیل اشتباه بودن عمل ذکر کرده‌اند. میزان چنان‌که نصیرالدین طوسی در کتاب خود *جوامع الحساب* آورده است بدین صورت تعریف می‌شود:

> «اگر محاسبه درست باشد، میزان درست است و اگر میزان درست نباشد، پس محاسبه درست نیست، و چنین نیست که اگر میزان درست شد محاسبه درست باشد یا اگر محاسبه درست نباشد، پس میزان درست نیاید.»

بر خلاف او بسیاری ریاضی‌دانان از جمله خوارزمی (سدهٔ ۳–۲ ق)، کرجی (د. حدود ۴۲۰ ق.)، عبدالقاهر بغدادی (سدهٔ -۴–۵ ق.)، نسوی (د. حدود ۴۷۳ ق.) میزان را چنین فرض گرفته‌اند که اگر میزان‌ها (در نتیجه و اجزا) مطابق به‌دست نمی‌آمد، محاسبات اشتباه بود و اگر مطابق می‌شد، محاسبات را درست فرض می‌کردند و در نتیجه «مطابق بودن» میزان‌ها را برابر با «درست بودن» محاسبات می‌گرفتند که در بسیاری از

کُتب حساب نیز به همین صورت شرح داده‌اند. توجّه به این نکته ضروری است که از دید منطق، مطابق بودن میزان‌ها نمی‌تواند لزوماً به‌معنای درست بودن محاسبات باشد، چه بسا ممکن است محاسبه اشتباه باشد، اما میزان‌ها براتّفاق برابر گردد؛ پس تطابق میزان‌ها برای نشان دادن درستی یک محاسبات ریاضی فقط شرط لازم است، ولی شرط کافی نیست. به‌جز نصیرالدین طوسی، تقی‌الدین بن عزالدین حنبلی (حدود سدهٔ ۸ ق.) نیز در تعریف میزان به شرط لازم و کافی دقت کرده است. ([۱۵، صص. ۳۶–۳۴])

در عمدهٔ رسایل حساب میزان‌گیری بر مبنای میزان نُه به‌کار رفته و در برخی دیگر از میزان یازده نیز یاد شده است. میزان نُه چنان است که مجموع ارقام عدد بر نُه را به دست آورده و سپس باقی‌ماندهٔ آن را بر نُه محاسبه می‌شود معمولاً با اصطلاحاتی چون «نُه نُه طرح کردن» یا «نُه نُه انداختن» بیان می‌شود و تا آنجا ادامه می‌یابد که باقی‌مانده عدد در قسمت بر نُه، کمتر از نُه شود و به این ترتیب در واقع هم‌نهشت عدد مذکور به پیمانهٔ نُه مشخص می‌گردد. این باقی‌مانده را میزان می‌نامند. اگر باقی‌مانده صفر بود و عدد بر نُه بخش‌پذیر بود، میزان آن را معادل با نُه در نظر می‌گیرند. میزان‌گیری برای تک‌تک اجزای عملیات حسابی انجام می‌گردد. به عنوان مثال اگر دو عدد را با هم جمع کنیم و بخواهیم درستی این عمل را امتحان کنیم، میزان هر یک را به دست آورده جمع می‌کنیم و با میزان حاصل جمع مقایسه می‌کنیم؛ به بیان دیگر میزان حاصل جمع را با حاصل جمع میزان‌ها می‌سنجیم. واضح است که نابرابری دو میزان گواه نادرستی عمل است ولی برابری آن درستی عملیات حسابی را ضمانت نمی‌کند. برای نمونه، حاصل جمع دو عدد ۱۷۶ و ۴۶۷ و بررسی میزان‌ها در روش میزان‌گیری۹ (یافتن هم‌نهشت عدد به پیمانهٔ ۹):

میزان (۱۷۶): ۵	میزان (۴۶۷): ۸
میزان (مجموع میزان‌ها (۱۳)): ۴	میزان مجموع (۶۴۳): ۴

همان‌طور که مشخص است میزان مجموع و مجموع میزان‌ها برابر شده‌اند، بنابراین محاسبه درست است؛ حال اگر حاصل مجموع به جای ۶۴۳، به اشتباه ۶۳۴ ثبت شود بازهم میزان‌ها مطابق می‌شود گرچه محاسبه نادرست است. این مثال نشان می‌دهد شرط تطابق میزان‌ها با اینکه شرط لازم برای درستی محاسبه است، اما شرط کافی برای برآورده ساختن آن نیست و درستی نتیجهٔ محاسبه را تضمین نمی‌کند.

میزان دیگری که در برخی از رسایل حسابی بدان اشاره شده میزان احدی عشر یا میزان یازده است. در این میزان باقی‌مانده یا هم‌نهشت عدد به پیمانهٔ یازده به دست می‌آید و طبق آن چه برای میزان نُه گفته شد، میزان حاصل را با حاصل میزان مقابله و مقایسه می‌کنند.

۳.۳ قاعدهٔ شبکهٔ مجموع: روشی برای آموزش ضرب و قسمت شیوهٔ ضرب و قسمت شبکه یکی از انواع محاسبات مخصوص کاغذ است که نخستین‌بار در آثار عربی و فارسی سدهٔ ۷ ق. معرفی شده است و به‌سبب جدولی و شبکه‌ای بودن ویژگی‌های قابل توجهی دارد. این شیوه برخلاف روش‌های مدرنی که امروزه در مدارس ارائه می‌شود، الگویی برای درک بهتر دانش‌آموزان از نظام دهگانی ارزش مکانی در حین انجام عمل ضرب و تمایز و انتقال بین مراتب یکان، دهگان، صدگان و بالاتر است. یکی از مزایای شیوهٔ ضرب شبکه در

ضرب اعداد بزرگ و چند رقمی (مثلاً چهار رقمی در پنج رقم و بیشتر) بوده که از دشواری ضرب مراتب بالا و امکان بروز خطا در آن کاسته و عمل ضرب را برای کودکان بسیار آسان و جذاب می‌سازد. ضرب شبکه با استفاده از الگوهای ذهنی، نظم منطقی و تصویرسازی مبتنی بر حافظهٔ دیداری، مفهومی ساده چون ضرب را با دید عمیق‌تری در ذهن نوآموز شکل می‌دهد (نک : [۱۷]).

معمولاً منشأ و پیشینهٔ ضرب و قسمت شبکه را از ژاپن یا چین می‌دانند گرچه شاهدی در متون کهن برای آن در دست نیست و به نظر می‌رسد این روش ضرب و قسمت بر خلاف دیگر روش‌هایی که در دورهٔ اسلامی از هند یا یونان وام گرفته شده، ابتکار دانشمندان مسلمان آن روزگار باشد. روشی که طبق شواهد به‌دست‌آمده نخستین بار در رساله‌های فارسی و عربی سدهٔ هفتم قمری از جمله *المرشد في الحساب* و *الشمسية في الحساب* برای انجام ضرب روی کاغذ مطرح شد و از آن پس از طریق رسایلی که در غرب جهان اسلام و در سرزمین اندلس کتابت شد، به ایتالیا و سپس سرتاسر اروپا و دیگر نقاط دنیا راه یافت و به‌عنوان یکی از روش‌های اصلی ضرب در تمامی رسایل حساب قرون ۱۳ و ۱۴ میلادی به کار رفت و مورد اقبال بسیاری از ریاضیدانان آن روزگار قرار گرفت.[۱۱]

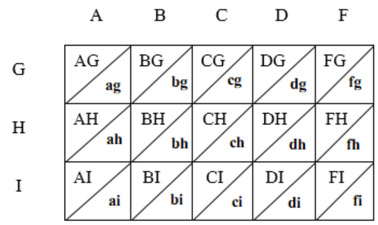
۱.۳.۳ *روش ضرب شبکه.* در این روش، جدولی با ستون‌هایی به تعداد مراتب عدد مضروب و با ردیف‌هایی به تعداد مراتب مضروب‌فیه رسم می‌کنند و آن را به تعداد مراتب اعداد مضروب و مضروب‌فیه به مربع‌های کوچکتر قسمت می‌کنند و اقطار این مربّع‌ها را نیز ترسیم می‌کنند. پس از آن مضروب را در بالا و مضروب‌فیه را در یکی از وجهین[۱۲] آن می‌نگارند. هر کدام از این ستون‌ها نمایشگر ارزش مکانی ارقامی است که در آن قرار می‌گیرد. عمل ضرب را از سمت چپ آغاز کرده حاصل‌ضرب را در مرّبعی که از تلاقی ستون و ردیف مضروبین به دست می‌آید می‌نویسند به طوری که دهگان آن در بالای قطر مربّع و یکان آن در زیر باشد. این عمل ضرب را با انجام ضرب تمامی ارقام مضروب در مضروب‌فیه برای دیگر مراتب نیز انجام می‌دهند تا تمام خانه‌های جدول از ارقام یکان و دهگان نتایج حاصل پر شود. پس از آن از پایین‌ترین سطر جدول گوشهٔ سمت راست (یکان حاصل‌ضرب) آغاز نموده و ارقام ثبت‌شده در راستای اقطار را به صورت موّرب جمع می‌کنند تا به شرط پایانی عمل ضرب دست یابند. اگر حاصل جمع بیشتر از ده شد یکان را یادداشت کرده و یکی به خانهٔ سمت چپ اضافه می‌گردد. حاصل‌ضرب، عددی است که از قرارگیری اعداد حاصل‌شده به ترتیب ارزش مکانی در کنار یکدیگر به دست آمده باشد:

یکان حاصل‌ضرب دو رقم: ag

دهگان حاصل‌ضرب دو رقم: AG

[۱۱] برای آگاهی از پیشینهٔ مبسوط این ضرب در منابع فارسی کهن سدهٔ هفتم قمری به [۷] نگاه کنید.

[۱۲] اگر مضروب‌فیه را در سمت چپ جدول بگذارند اقطار را مانند شکل ۱ از راست بالا به چپ پایین می‌کشند و اگر در سمت راست بنویسند، جدول متقارن شده و اقطار را از راست پایین به چپ بالا رسم می‌کنند. شیوهٔ دوم بیشتر در سنت غربی رسایل حساب مرسوم است.



شکل ۴: مراحل انجام ضرب شبکه

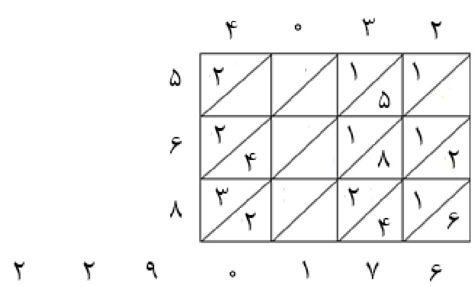
در نهایت حاصل ضرب با رعایت ارزش مکانی ارقام به‌دست‌آمده و انتقال مراتب آن به این صورت خواهد بود:
جای‌گذاری ارقام به ترتیب از ارزش مکانی کمتر به بیشتر ←

AG	AH+ag+BG	AI+ah+BH+bg+CG	ai+BI+bh+CH+cg	bi+CI+ch+DH+dg	ci+DI+dh+FH+fg	di+FI+fh	Fi

شکل ۵: طریقهٔ خواندن حاصل‌ضرب شبکه

این روش همانطور که در *الشمسية في الحساب* آمده برای تحلیل ضرب مرکبات به ضرب مفردات است. اگر یکی از مضروبین، غیر مفرد (یا غیر مجرد) باشد از «ضرب شبکه» برای آن استفاده می‌شود. شکل ۶ مثالی از ضرب شبکه در *الشمسية في الحساب* نظام‌الدین الاعرج نیشابوری (د. پس از ۷۲۸ ق.) است (نک [۱۳، گ۱۳ر]؛ [۱۴، گ۱۱ر]).
مترجم ناشناس *الشمسية في الحساب* نیز در توصیف آن چنین آورده:

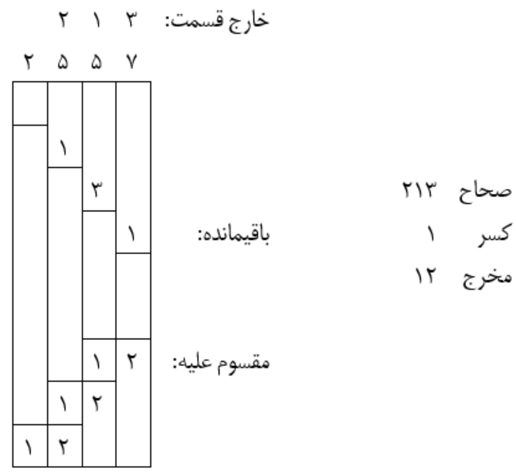
> «و این طریقه بغایت نیکوست و غریب، چنان‌که بعضی از افاضل عصر به دانستن این مباهات می‌کنند و در تعلیم صفت می‌نمایند وهو اعلمُ بالسرایر» ([۱، گ۱۲پ])



شکل ۶: ضرب شبکه: حاصل‌ضرب ۴۰۳۲ در ۵۶۸

۲.۳.۳ *روش قسمت شبکه.* در این روش، جدولی با ستون‌هایی به تعداد مراتب عدد مقسوم رسم می‌کنند و عدد مقسوم را در بالای آن می‌نگارند. هر کدام از این ستون‌ها نمایشگر ارزش مکانی ارقامی است که در آن قرار می‌گیرد. عدد مقسوم‌علیه در انتهای جدول در پایین‌ترین ردیف ممکن طوری قرار می‌دهند که رقم بزرگترین ارزش مکانی آن در ستون درست جدول (اوّلین ستون از سمت چپ) جای بگیرد. عمل قسمت را از سمت چپ آغاز کرده بزرگترین عددی را می‌یابند که اگر آن را در مقسوم‌علیه ضرب کنند برابر یا کمتر از عدد مقسوم شود. اوّلین عددی که پیدا شود را به عنوان اوّلین رقم خارج قسمت در بالای عدد مقسوم و در یک مرتبهٔ پایین‌تر ارزش مکانی قرار می‌دهند. این عمل را هر بار با جابه‌جایی عدد مقسوم‌علیه به سمت راست و برای دیگر مراتب انجام داده تا به شرط پایانی عمل قسمت دست یابند. برای مشخص ساختن پایان هر مرحله خطی زیر عدد مقسوم و بالای عدد مقسوم‌علیه می‌کشند. برای روشن‌تر شدن موضوع به انجام یک نمونه قسمت می‌پردازیم و عدد ۲۵۵۷ را بر ۱۲ قسمت می‌کنیم:

جدول را رسم کرده مقسوم و مقسوم‌علیه را در جای خود قرار می‌دهیم. از سمت چپ آغاز می‌کنیم و ۲ را بر ۱ قسمت کرده حاصل را که ۲ است در بالای عدد مقسوم و در یک مرتبه پایین‌تر ارزش مکانی قرار می‌دهیم. خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده از مقسوم کم می‌کنیم. حاصل تفاضل را زیر عدد مقسوم می‌نویسیم. با پایان یافتن مرحلهٔ اول خطی زیر عدد تفاضل و بر بالای مقسوم‌علیه کشیده آن را یک مرتبه به سمت راست جابه‌جا کرده و عمل قسمت را مانند مرحله قبل تکرار می‌کنیم. این بار خارج قسمتی که حاصل‌ضرب آن در ۱ برابر با ۱ شود را ۱ یافته در بالای جدول به عنوان دومین رقم خارج قسمت قرار می‌دهیم. خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده از مقسوم که در این مرحله ۱۵ است کم می‌کنیم. حاصل را که ۳ می‌شود در ستون مربوط نگاشته زیر آن خطی می‌کشیم و به مرحلهٔ بعد می‌رویم. با انتقال مقسوم‌علیه به سمت راست، عدد ۳ را به عنوان آخرین مرتبهٔ خارج قسمت می‌یابیم که اگر در ۱ ضرب شود حاصل برابر با ۳ شود. با جایگذاری عدد خارج قسمت در آخرین مرتبه و به دست آمدن باقیماندهٔ کمتر از مقسوم‌علیه عمل قسمت پایان می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود سعی بر آن بوده که در روش قسمت به طریق شبکه با استفاده از کاغذ نیز جایگاه خارج قسمت به عنوان صحاح، باقیمانده به عنوان کسر و مقسوم‌علیه به عنوان مخرج حفظ شود. گرچه در این نوع تقسیم مجبوریم تمامی مراحل را روی کاغذ دنبال کنیم و فاصلهٔ این سه عدد از یکدیگر زیاد خواهد شد و به نظر نمی‌رسد مواضع کسری در نمایش یونانی آن را به ذهن نزدیک کند ولی با این حال ترتیب نوشتار اعداد خارج قسمت (صحیح) و باقی‌مانده (کسر) در آن، منطبق بر ترتیب نوشتاری کسر مخلوط است.



شکل ۷: قسمت شبکه: خارج قسمت ۲۵۵۷ بر ۱۲

۴. واژگان حساب

آشنایی با اصطلاحات تخصصی متون کهن به‌منظور درک بهتر محتوا و مضامین علمی آن‌ها از ملزومات اولیه است. برخی اصطلاحات حساب که در رسالهٔ *ضرب و قسمت منظوم* به کار رفته و همچنین تعاریف آن در جدول (۱) آمده است[۱۳].

جدول ۱: واژگان حساب در اثر *ضرب و قسمت*

واژگان	تعریف
آحاد	یکان؛ نخستین ارزش مکانی؛ ارقامی که در اوّلین مرتبه قرار می‌گیرند و کم‌ترین ارزش مکانی را دارند.
طاق	فرد؛ عددی که باقیماندهٔ آن بر دو یک باشد.
جفت	زوج؛ عددی که باقیماندهٔ آن بر دو صفر باشد.
کسر	(۱) باقیماندهٔ عمل قسمت، (۲) صورت [کسر]
تنصیف	بخش کردن عدد بر دو؛ نیمه کردن
الوف	هزارگان؛ دور دوم دربرگیرندهٔ مرتبهٔ ارزش مکانی چهارم تا ششم عدد
مفرد	(عددی که) تنها یک رقم غیر صفر در یک مرتبهٔ ارزشی داشته باشد؛ مانند ۵، ۶۰، ۷۰۰، ۸۰۰۰۰
مرکب	(عددی که) بیش از یک رقم غیر صفر داشته باشد مانند ۴۵، ۳۰۲، ۶۸۰
صحاح	(عددی که) در جایگاه اوّل از مواضع سه‌گانهٔ کسر مخلوط قرار می‌گیرد؛ (بخش) غیر کسری یک عدد مخلوط
تضعیف	دو برابر کردن
عشرات	دهگان؛ مرتبهٔ دوم عدد
زاید	اندازهٔ بیشی یک مقدار از مقدار دیگر
فاضل	فاصلهٔ میان دو عدد؛ میزان اختلاف دو عدد
صورت	رقم؛ نشانه‌ای برای عددنویسی
میات/مئات/مآت	صدگان؛ مرتبهٔ سوم عدد

[۱۳](برای آگاهی از تفکیک‌های معنایی و شواهد متنی بیشتر، نک : [۶] ذیل «آحاد»، «الوف»، «تضعیف»، «تنصیف»، «جفت»، «زاید»، «صحاح»، «صورت»، «طاق»، «عشرات»، «فاضل»، «کسر»، «مرکب»، «مفرد» و «میات».)

۵. نتیجه‌گیری

پیوند ادبیات با ریاضیات و بهره‌مندی از شعر به‌عنوان وسیله‌ای کمک‌آموزشی در منابع حساب، پیشینهٔ دیرین دارد. آثاری که در حساب عملی و خصوصاً حساب هوایی نوشته می‌شد به‌سبب آن‌که روشی مبتنی بر حافظه به‌کار می‌گرفت، آکنده از دوبیتی‌ها و اشعار کوتاه و بلندی است که برای آسان‌تر به خاطر سپاردن و یادآوری سریع‌تر سروده شده است. افزون بر حساب عملی، در حساب هندی نیز سابقهٔ به‌کارگیری ابیات فارسی در آموزش حساب در دو دست‌نویس منظوم ۵۳۷۹ و ۶۵۴۵ محفوظ در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی به یادگار مانده است (شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ را در پیوست‌ها ببینید). در این دو اثر، قواعد ریاضیات را با بهره‌گیری از فنون ادبی و در قالب شعر و به طریقی متفاوت از شیوهٔ رایج به نوآموزان آموزانده‌اند. شعر، ابزار مناسبی برای آموختن حساب بود، به‌خصوص برای آن دسته از مردم که ریاضیات پیشهٔ اصلی ایشان نبود یا با روش‌های حسابی بیگانه بودند و یادگیری و از بر کردن مراحل اعمال حسابی برایشان مشکل می‌نمود، اما در حرفهٔ خود به حساب نیاز داشتند.

روش شبکه نیز یک شیوه در انجام عمل ضرب و قسمت است که ابیات مربوط بدان در این دو رساله به‌طور مشترک و همانند بیان شده و جایگزین روش‌های ضرب و قسمت مخصوص تخت و تراب است و در ضرب‌های طولانی و چندرقمی کارآمد و راهگشاست. این شیوه مطابق با منابع مکتوب موجود به سدهٔ هفتم هجری قمری تعلق دارد.

مراجع

[۱] *ترجمة الشمسية في الحساب*، نسخهٔ خطی ۵۱۵س کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

[۲] *رساله‌ای در ضرب و قسمت*، نسخهٔ خطی ۵۳۷۹ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی، گ۵۷ر–۶۲ر.

[۳] *منظومه در حساب*، نسخهٔ خطی ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی، گ۱پ–۱۵پ.

[۴] چ. برنت، *ورود ارقام هندی در زبان‌های عربی، یونانی و لاتینی*؛ ترجمهٔ فاطمه سادات سعادتمند، میراث علمی اسلام و ایران، ۶ (۱۳۹۶)، ۹۶–۸۴.

[۵] ابوریحان بیرونی، *تحقیق ماللهند من مقوله مقبوله في العقل او مرذوله*، بیروت: ۱۴۰۳ ق/۱۹۸۳ م.

[۶] ف. س. سعادتمند، *واژگان علم حساب در آثار فارسی تا قرن سیزدهم هجری قمری*؛ پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم، پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران، ۱۳۹۶.

[۷] ف. س. سعادتمند، *دو ترجمهٔ کهن فارسی از جوامع الحساب بالتخت والتراب: «لباب الحساب في علم التراب» و «جامع الحساب نظامی»*، تاریخ علم، ۱۹ (۱۴۰۰)، شمارهٔ ۲، ۵۰۶–۴۶۵.

[۸] ف. س. سعادتمند، *آثار خواجه نصیرالدین طوسی در حساب هندی و حساب هوایی*؛ پنجاه و سومین کنفرانس ریاضی ایران، شهریور ۱۴۰۱.

[۹] قاضی صاعد اندلسی، *التعریف بطبقات الأمم*، به‌کوشش لویس شیخو، بیروت: ۱۹۱۲.

[۱۰] الف، قربانی، *نسوی‌نامه: تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی*، تهران: مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، ۱۳۷۰.

[۱۱] ج. گورگیس یوسف، *کاکل طاووس*، ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار، تهران: انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۵.

[۱۲] ح. معصومی همدانی، *حساب*، دایرة المعارف بزرگ اسلامی ۲۰، تهران: مرکز دایرة المعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۹۱.

[۱۳] نظام‌الدین الاعرج نیشابوری، *الشمسیة في الحساب*، نسخهٔ خطی ۶۰۷۴ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

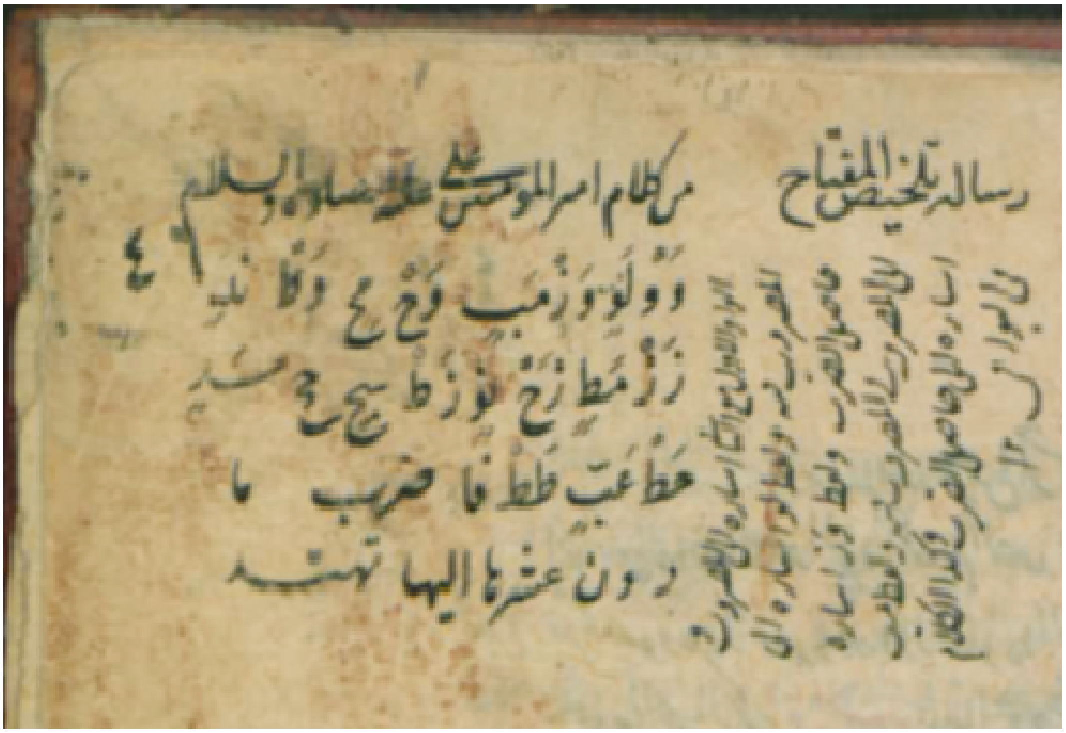
[۱۴] نظام‌الدین الاعرج نیشابوری، *الشمسیة في الحساب*، نسخهٔ خطی ۶۲۴۱ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

[15] B. Carra de Vaux, *Sur l'histoire de l'arithmétique arabe*, Bibliotheca Mathematica, (1899), Issue 2, Vol 13.

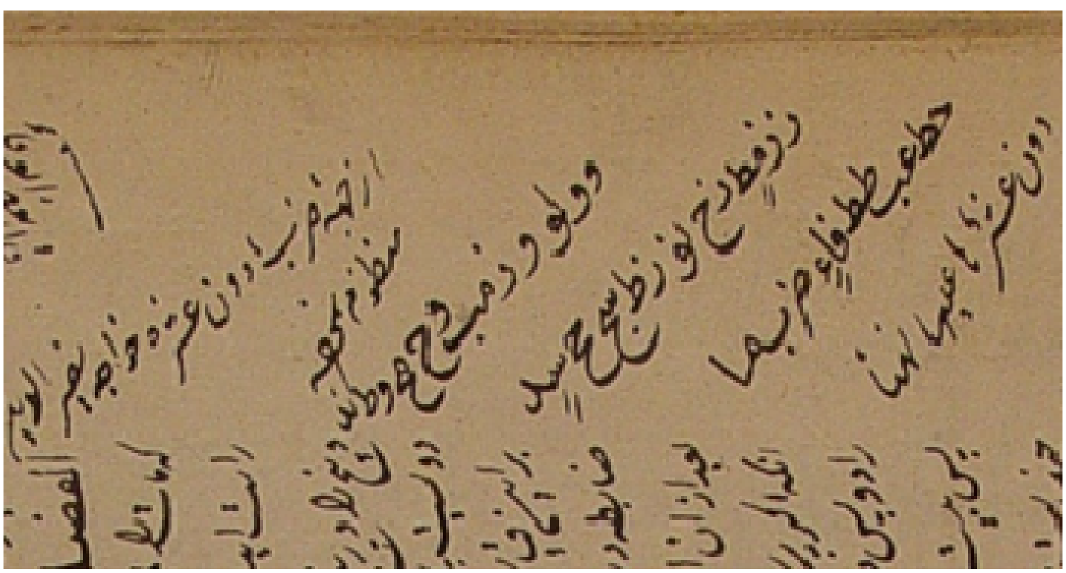
[16] H.W. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders 1990.

[17] F. Saadatmand, *The Potential of Applying the Middle Ages Mathematical Methods for Elementary Educational Purposes* , in: History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Miskolc, Hungary, May 18-21, 2022.

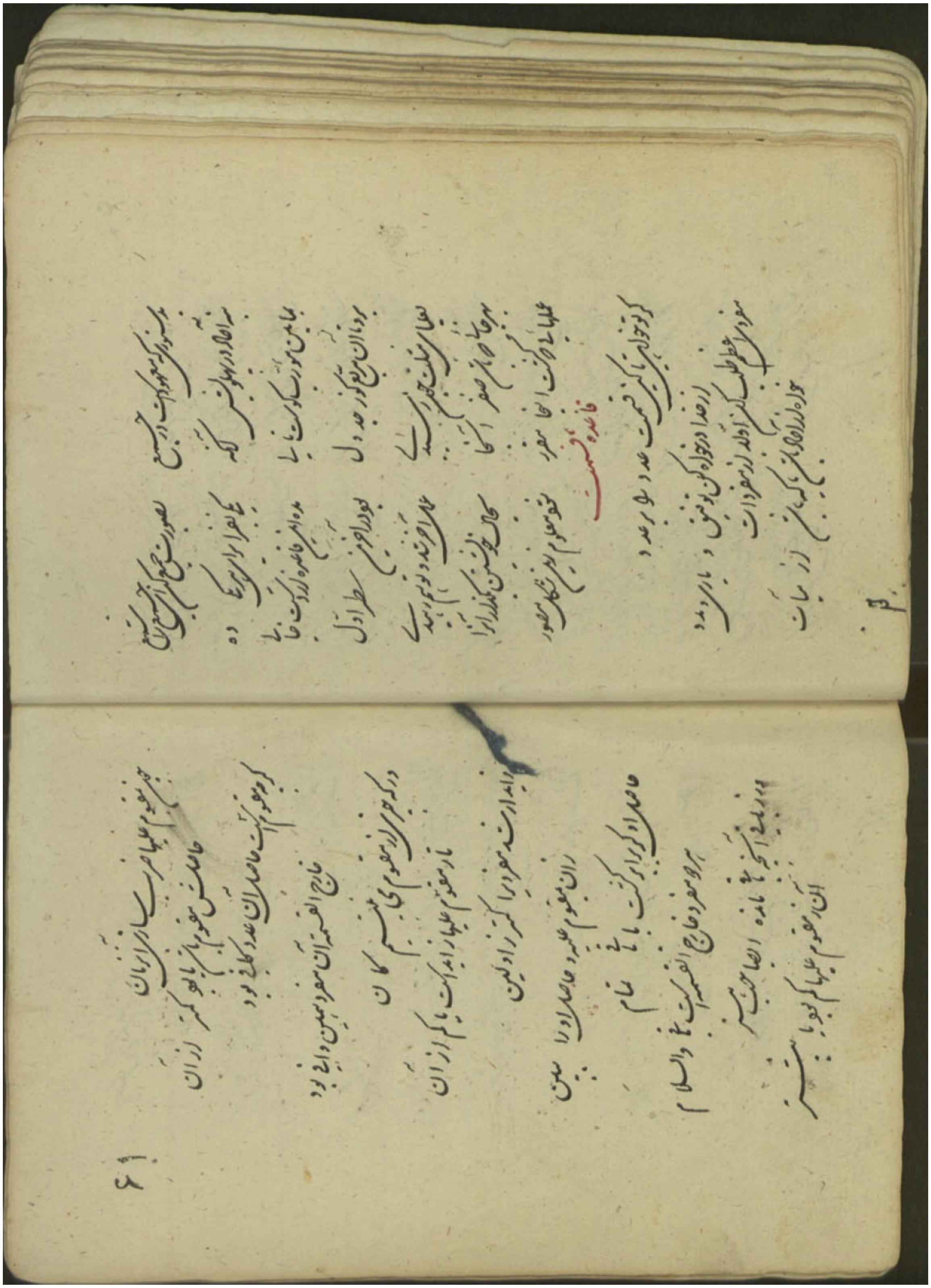
پیوست‌ها



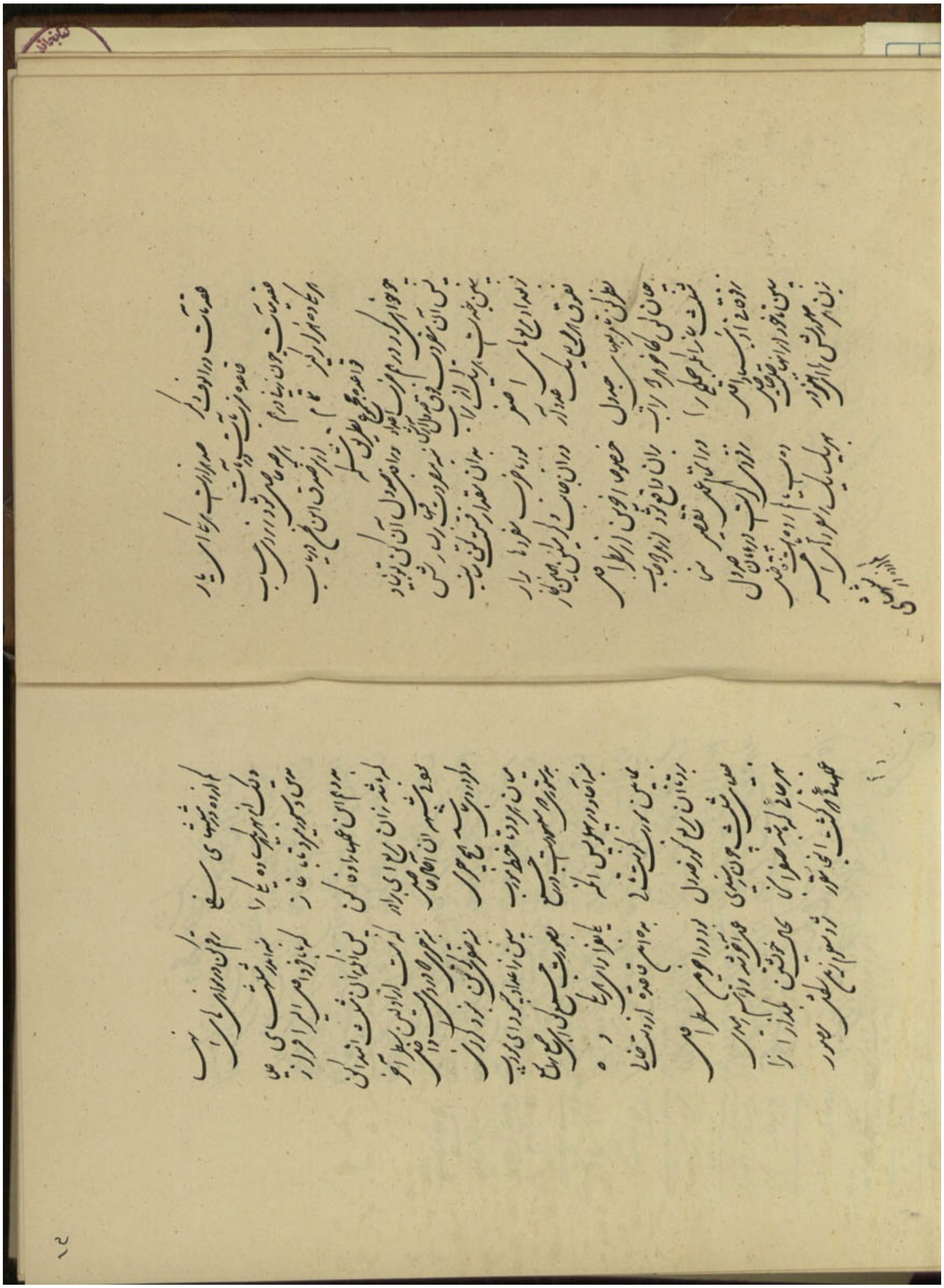
شکل ۸: برگ عنوان کتاب *تلخیص المفتاح*، نسخهٔ خطی ۶۸۲۷ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



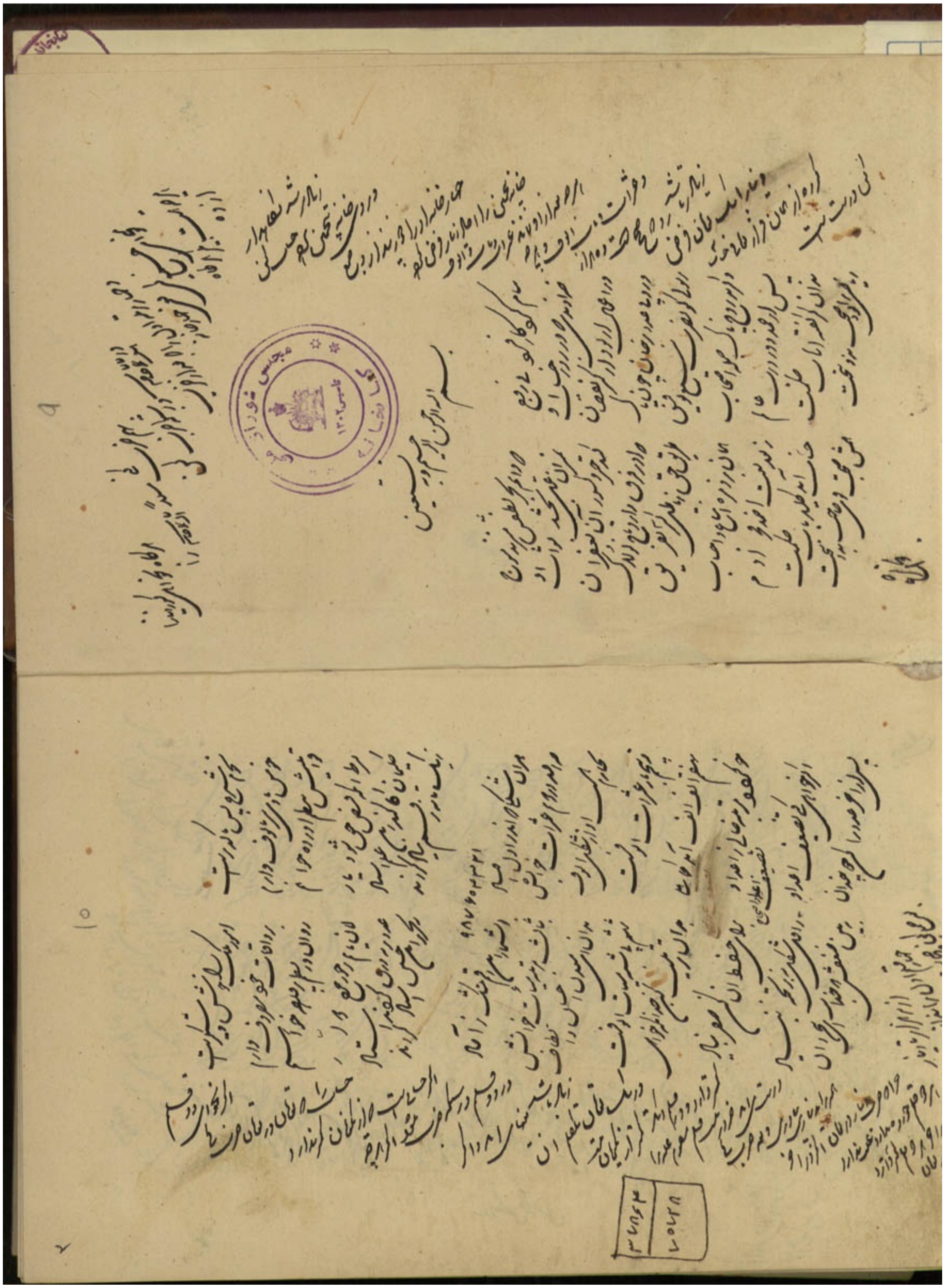
شکل ۹: حاشیهٔ نسخهٔ خطی در ضرب، از مجموعهٔ ۱۱۲۴ مرکز دائرة المعارف بزرگ اسلامی



شکل ۱۰: نسخهٔ خطی شمارهٔ ۵۳۷۹ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



شکل ۱۱: ضرب شبکه نسخهٔ خطی شمارهٔ ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی



شکل ۱۲: آغازهٔ نسخهٔ خطی شمارهٔ ۶۵۴۵ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی